

**INFLUENCIA DE LA RESISTENCIA AERODINÁMICA EN EL MOVIMIENTO DE
PROYECTILES: ALCANCE, ALTURA Y TIEMPO DE VUELO
INFLUENCE OF AERODYNAMIC DRAG ON PROJECTILE MOTION: RANGE,
MAXIMUM HEIGHT, AND FLIGHT TIME**

Autores: ¹Manuel Macario Castro Briones, ²Carlos Luis Gusqui Guananga y ³Joselyn Alexandra Miranda Masaquiza.

¹ORCID ID: <https://orcid.org/0009-0008-2936-9465>

²ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-5449-5967>

³ORCID ID: <https://orcid.org/0009-0000-0424-4385>

¹E-mail de contacto: mcastro11@unemi.edu.ec

²E-mail de contacto: gusquicarlos@gmail.com

³E-mail de contacto: alexa.miranda96@outlook.es

Afiliación: ¹*Universidad Estatal de Milagro, (Ecuador). ²*Autor independiente, (Ecuador). ³*Dirección Distrital 06D03 Cumandá Pallatanga Educación, (Ecuador).

Artículo recibido: 19 de Agosto del 2026.

Artículo revisado: 21 de Agosto del 2026.

Artículo aprobado: 21 de Agosto del 2026.

¹Ingeniero Civil, graduado de la Universidad Estatal del Sur de Manabí, (Ecuador).

²Ingeniero Mecánico, graduado de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, (Ecuador). Magíster en Física, graduado de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, (Ecuador).

³Biofísica, graduado de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, (Ecuador). Magíster en Matemática mención Modelación y Docencia, graduado de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, (Ecuador). Magíster en Educación con mención en Docencia e Investigación en Educación Superior de la Universidad Estatal de Milagro Chimborazo, (Ecuador).

Resumen

El objetivo de este estudio fue analizar cuantitativamente la influencia de la resistencia aerodinámica cuadrática sobre el movimiento bidimensional de proyectiles, comparando el alcance horizontal, la altura máxima, el tiempo de vuelo y el ángulo de lanzamiento que maximiza el alcance con los valores del modelo ideal. Se desarrolló un estudio computacional factorial con cuatro velocidades iniciales de 10, 20, 30 y 40 metros por segundo, cinco ángulos de lanzamiento entre 15 y 75 grados y cuatro niveles de resistencia aerodinámica. Las ecuaciones diferenciales no lineales se resolvieron mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden, y el procedimiento se validó frente a las soluciones analíticas del movimiento sin resistencia. Se ejecutaron 80 condiciones principales y una búsqueda numérica adicional del ángulo óptimo. Los resultados mostraron que el alcance fue la variable más sensible al arrastre, seguido por la altura máxima y el tiempo de vuelo. Para la mayor resistencia analizada, la reducción media del alcance aumentó de 7,47 % a 51,87 % al incrementar la velocidad inicial de 10 a 40 metros por segundo. La reducción máxima del

alcance fue 58,09 %, mientras que el ángulo óptimo disminuyó desde 45 grados hasta 38,861 grados. Se concluye que la resistencia aerodinámica modifica de forma no uniforme las variables del movimiento y que sus efectos aumentan con la velocidad inicial y la intensidad del arrastre.

Palabras clave: Resistencia aerodinámica, Movimiento de proyectiles, Alcance horizontal, Altura máxima, Tiempo de vuelo, Simulación numérica.

Abstract

The objective of this study was to quantitatively analyze the influence of quadratic aerodynamic drag on two-dimensional projectile motion by comparing horizontal range, maximum height, flight time, and the launch angle that maximizes range with the corresponding values from the ideal model. A factorial computational study was developed using four initial velocities of 10, 20, 30, and 40 meters per second, five launch angles between 15 and 75 degrees, and four levels of aerodynamic drag. The nonlinear differential equations were solved using the fourth-order Runge-Kutta method, and the procedure was validated against the analytical

solutions for motion without drag. Eighty main conditions were simulated, together with an additional numerical search for the optimal launch angle. The results showed that range was the variable most sensitive to drag, followed by maximum height and flight time. For the highest drag level analyzed, the mean reduction in range increased from 7.47% to 51.87% as initial velocity increased from 10 to 40 meters per second. The maximum range reduction was 58.09%, while the optimal launch angle decreased from 45 degrees to 38.861 degrees. It is concluded that aerodynamic drag modifies projectile-motion variables nonuniformly and that its effects become increasingly important as initial velocity and drag intensity increase.

Keywords: Aerodynamic drag, Projectile motion, Horizontal range, Maximum height, Flight time, Numerical simulation.

Sumário

O objetivo deste estudo foi analisar quantitativamente a influência da resistência aerodinâmica quadrática sobre o movimento bidimensional de projéteis, comparando o alcance horizontal, a altura máxima, o tempo de voo e o ângulo de lançamento que maximiza o alcance com os valores correspondentes do modelo ideal. Desenvolveu-se um estudo computacional fatorial com quatro velocidades iniciais de 10, 20, 30 e 40 metros por segundo, cinco ângulos de lançamento entre 15 e 75 graus e quatro níveis de resistência aerodinâmica. As equações diferenciais não lineares foram resolvidas pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem, e o procedimento foi validado mediante comparação com as soluções analíticas do movimento sem resistência. Foram simuladas 80 condições principais e realizada uma busca numérica adicional do ângulo ótimo. Os resultados mostraram que o alcance foi a variável mais sensível ao arrasto, seguido pela altura máxima e pelo tempo de voo. Para o maior nível de resistência analisado, a redução média do alcance aumentou de 7,47% para 51,87% quando a velocidade inicial aumentou de 10 para 40 metros por segundo. A redução máxima do alcance foi de 58,09%, enquanto o ângulo ótimo diminuiu de 45 graus para 38,861

graus. Conclui-se que a resistência aerodinâmica modifica de forma não uniforme as variáveis do movimento e que seus efeitos aumentam com a velocidade inicial e a intensidade do arrasto.

Palavras-chave: Arrasto aerodinâmico, Movimento de projéteis, Alcance horizontal, Altura máxima, Tempo de voo, Simulação numérica.

Introducción

El movimiento de proyectiles constituye uno de los problemas clásicos de la mecánica y mantiene interés tanto por su valor formativo como por sus aplicaciones en ingeniería, tecnología y deportes. En su formulación ideal, el cuerpo se considera sometido únicamente a una aceleración gravitatoria uniforme; la componente horizontal de la velocidad permanece constante, la componente vertical cambia linealmente con el tiempo y la trayectoria resultante es parabólica. Bajo estas condiciones, el alcance horizontal, la altura máxima y el tiempo de vuelo se obtienen mediante expresiones analíticas directas. Esta simplificación es útil para establecer relaciones fundamentales entre velocidad, ángulo y desplazamiento, pero deja de representar adecuadamente muchas situaciones reales cuando la interacción con el aire no puede despreciarse (Parker, 1977; Kantrowitz y Neumann, 2020).

La resistencia aerodinámica actúa en sentido opuesto a la velocidad relativa del cuerpo y su magnitud depende del régimen de flujo, de las propiedades del fluido y de las características geométricas y dinámicas del proyectil. Para números de Reynolds muy bajos, una dependencia aproximadamente lineal con la velocidad puede resultar apropiada; en numerosos movimientos de cuerpos macroscópicos en aire, en cambio, la representación cuadrática adquiere mayor

pertinencia (Long & Weiss, 1999; Lubarda y Lubarda, 2022). Esta distinción no es solamente formal: la elección de la ley de arrastre cambia las ecuaciones de movimiento, las trayectorias y la posibilidad de obtener soluciones analíticas.

Cuando se considera arrastre cuadrático, las componentes horizontal y vertical quedan acopladas a través de la magnitud instantánea de la velocidad. Como consecuencia, el problema bidimensional se expresa mediante ecuaciones diferenciales no lineales para las cuales no existe, en general, una solución explícita simple en función del tiempo. Diferentes trabajos han desarrollado soluciones implícitas, aproximaciones analíticas, expansiones y métodos numéricos para describir el movimiento (Hayen, 2003, Das y Roy, 2014; Corvo, 2022). Bradshaw (2023) mostró que las ecuaciones correspondientes a las componentes de velocidad pueden desacoplarse al reformularlas respecto del ángulo instantáneo de la velocidad, aunque las relaciones de posición y tiempo continúan requiriendo integración. Duan et al. (2023), por su parte, compararon soluciones analíticas por tramos con soluciones numéricas de orden superior y demostraron la utilidad de estrategias computacionales para controlar los errores en trayectorias sometidas a arrastre cuadrático.

Los desarrollos recientes confirman que el problema continúa activo y admite distintas aproximaciones. Lubarda y Lubarda (2022) revisaron el movimiento de proyectiles bajo arrastre lineal y no lineal, incluyendo la influencia del viento. Chudinov et al. (2023) propusieron aproximaciones analíticas para el movimiento con resistencia cuadrática y viento horizontal constante, y obtuvieron concordancia con soluciones numéricas. Rosales (2024) estudió trayectorias con arrastre turbulento mediante técnicas exactas,

asintóticas y numéricas, mientras que Asad et al. (2025) aplicaron un método de transformación diferencial multietapa al cálculo de altura, alcance y tiempo de vuelo. Más recientemente Jobunga (2026) analizó una formulación que combina contribuciones lineales y cuadráticas y destacó que el término cuadrático adquiere predominio a velocidades elevadas.

Además de resolver las ecuaciones, resulta relevante cuantificar cómo cambia cada variable cinemática al abandonar el modelo ideal. La resistencia no tiene por qué afectar en igual proporción al alcance, la altura máxima y el tiempo de vuelo. La componente horizontal de la velocidad disminuye de manera continua durante todo el movimiento, mientras que la componente vertical presenta una dinámica distinta entre ascenso y descenso porque el arrastre cambia de sentido respecto de la gravedad. Esta asimetría puede producir pérdidas relativas diferentes entre las variables. Yıldırım (2025) mostró que el análisis de promedios de tiempo de vuelo, alcance y altura bajo arrastre lineal y cuadrático permite caracterizar de forma comparativa la respuesta del movimiento, mientras que estudios con resistencia lineal han evidenciado igualmente cambios sistemáticos en la geometría de las trayectorias y en sus máximos (Morales et al., 2023; Jobunga et al., 2024).

El ángulo que maximiza el alcance constituye otra magnitud de interés. En el modelo ideal, cuando la altura inicial y final coinciden, el máximo se obtiene a 45° . Con resistencia, esta propiedad deja de ser universal. Los análisis clásicos de Hayen (2003) establecieron condiciones para determinar el alcance máximo y el ángulo óptimo en presencia de arrastre cuadrático, y trabajos anteriores sobre aplicaciones deportivas mostraron que el

equilibrio entre arrastre, sustentación y condiciones iniciales puede desplazar de manera importante el ángulo de mayor alcance (Erlichson, 1983). A pesar de la extensa literatura sobre soluciones matemáticas y aplicaciones particulares, resulta útil disponer de una comparación sistemática en la que la intensidad de la resistencia se modifique de manera controlada y se evalúen simultáneamente tres variables cinemáticas de interpretación directa. Una parametrización basada en la relación entre densidad del fluido, coeficiente de arrastre, área frontal y masa permite estudiar distintos niveles de susceptibilidad aerodinámica sin restringir el análisis a una pelota, esfera o proyectil concreto. De esta forma, puede examinarse cómo interactúan velocidad inicial, ángulo de lanzamiento e intensidad del arrastre y, adicionalmente, cómo se desplaza el ángulo que produce el máximo alcance.

Por lo anterior, el objetivo de este estudio fue analizar cuantitativamente la influencia de la resistencia aerodinámica cuadrática sobre el movimiento bidimensional de proyectiles mediante la comparación del alcance horizontal, la altura máxima y el tiempo de vuelo con los valores correspondientes al modelo ideal, considerando diferentes velocidades iniciales, ángulos de lanzamiento e intensidades de arrastre. Adicionalmente, se determinó la variación del ángulo de lanzamiento que maximiza el alcance.

Materiales y Métodos

Se desarrolló un estudio cuantitativo de carácter computacional. Se compararon dos condiciones: un modelo ideal sometido únicamente a gravedad y un modelo no ideal con resistencia aerodinámica proporcional al cuadrado de la rapidez. Se consideró movimiento bidimensional en un sistema

cartesiano, con lanzamiento desde el origen y retorno al mismo nivel vertical. Se adoptó una aceleración gravitatoria constante de $9,81 \text{ m/s}^2$. Para aislar el efecto del arrastre, no se incorporaron viento, rotación del proyectil, fuerza de Magnus, cambios de densidad atmosférica ni variaciones de la aceleración gravitatoria durante el vuelo.

En ausencia de resistencia, las coordenadas se expresaron como:

$$x(t) = v_0 \cos(\theta) t \quad (1)$$

$$y(t) = v_0 \sin(\theta) t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (2)$$

Para una altura inicial igual a la altura final, el alcance horizontal, la altura máxima y el tiempo de vuelo se calcularon mediante:

$$R_0 = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g} \quad (3)$$

$$H_0 = \frac{v_0^2 \sin^2(\theta)}{2g} \quad (4)$$

$$T_0 = \frac{2v_0 \sin(\theta)}{g} \quad (5)$$

Estos valores se utilizaron como referencia para cuantificar el efecto del arrastre y para validar el procedimiento numérico.

La fuerza resistente se representó mediante:

$$\vec{F}_D = -\frac{1}{2} \rho C_D A v^2 \hat{v} \quad (6)$$

Aquí, ρ corresponde a la densidad del fluido, C_D al coeficiente de arrastre, A al área frontal, v a la rapidez instantánea y $\hat{v}$ al vector unitario en la dirección de la velocidad. La formulación cuadrática es consistente con el tratamiento de cuerpos macroscópicos en regímenes en los que el arrastre inercial adquiere mayor importancia (Long y Weiss, 1999; Lubarda y Lubarda, 2022; Bradshaw, 2023). Para analizar diferentes

intensidades de resistencia sin restringir los resultados a un objeto particular, se definió el parámetro aerodinámico específico:

$$k = \frac{\rho C_D A}{2m} \quad (7)$$

con unidades de m^{-1} , donde m es la masa del proyectil. Las ecuaciones de movimiento quedaron definidas por:

$$\frac{dv_x}{dt} = -kvv_x \quad (8)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - kvv_y \quad (9)$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (10)$$

con condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} v_x(0) &= v_0 \cos(\theta), & v_y(0) \\ &= v_0 \sin(\theta) \end{aligned} \quad (11)$$

La estructura no lineal y acoplada de estas ecuaciones es característica del arrastre cuadrático bidimensional y justifica su solución numérica (Hayen, 2003a; Bradshaw, 2023; Duan et al., 2023). Se combinaron cuatro velocidades iniciales, cinco ángulos de lanzamiento y cuatro valores del parámetro aerodinámico. El diseño produjo 80 condiciones principales de simulación.

Tabla 1. Condiciones utilizadas en las simulaciones.

Parámetro	Valores
Velocidad inicial, v_0	10, 20, 30 y 40 m/s
Ángulo de lanzamiento, θ	15°, 30°, 45°, 60° y 75°
Parámetro aerodinámico, k	0; 0,004; 0,008 y 0,012 m^{-1}
Aceleración gravitatoria	9,81 m/s^2
Altura inicial y final	0 m
Paso temporal	0,002 s
Condiciones principales	80

Fuente: Elaboración propia.

El valor $k = 0$ representó el movimiento ideal. Los valores positivos describieron intensidades progresivamente mayores de arrastre. La

comparación se realizó mediante una parametrización general y no mediante la asignación de propiedades a un único objeto, de modo que los resultados representan diferentes relaciones posibles entre masa, área frontal, coeficiente de arrastre y densidad del aire.

El sistema se resolvió mediante el método de Runge de cuarto orden con un paso temporal de 0,002 s. En cada iteración se actualizaron posición, componentes de velocidad y rapidez. La integración continuó hasta detectar el cruce de $y = 0$ durante la fase descendente; el alcance y el tiempo de impacto se estimaron mediante interpolación entre los dos pasos temporales que delimitaban el cruce. La altura máxima correspondió al mayor valor vertical alcanzado durante la integración.

La exactitud del procedimiento se comprobó ejecutando las condiciones con $k = 0$ y comparando los resultados numéricos con las ecuaciones (3), (4) y (5). El error relativo máximo fue de 0,000201 % para el alcance, 0,000124 % para la altura máxima y 0,000201 % para el tiempo de vuelo. Estos valores se consideraron suficientemente pequeños respecto de las diferencias producidas por la resistencia aerodinámica. Para cada condición con arrastre se calcularon las reducciones relativas:

$$\Delta R = \frac{R_0 - R_D}{R_0} \times 100 \quad (12)$$

$$\Delta H = \frac{H_0 - H_D}{H_0} \times 100 \quad (13)$$

$$\Delta T = \frac{T_0 - T_D}{T_0} \times 100 \quad (14)$$

Donde R_D , H_D y T_D corresponden al alcance, la altura máxima y el tiempo de vuelo bajo resistencia aerodinámica. Finalmente, para cada

combinación de velocidad inicial y k se determinó el ángulo que maximiza el alcance mediante una búsqueda numérica acotada entre 1° y 89° , con criterio de convergencia. Los resultados del ángulo óptimo se reportaron a tres decimales.

Resultados y Discusión

La incorporación de resistencia aerodinámica produjo reducciones sistemáticas del alcance, la altura máxima y el tiempo de vuelo, además de una pérdida de la simetría característica de la parábola ideal. En la condición representativa de $v_0 = 30$ m/s y $\theta = 45^\circ$, el modelo sin resistencia produjo un alcance de 91,7431 m, una altura máxima de 22,9358 m y un tiempo de vuelo de 4,3248 s. Al aumentar k a 0,004; 0,008 y 0,012 m^{-1} , el alcance disminuyó a 72,0728; 60,1792 y 52,0712 m, respectivamente. Para el mayor nivel de arrastre en esta condición, las reducciones fueron 43,24 % en alcance, 28,63 % en altura máxima y 15,86 % en tiempo de vuelo.

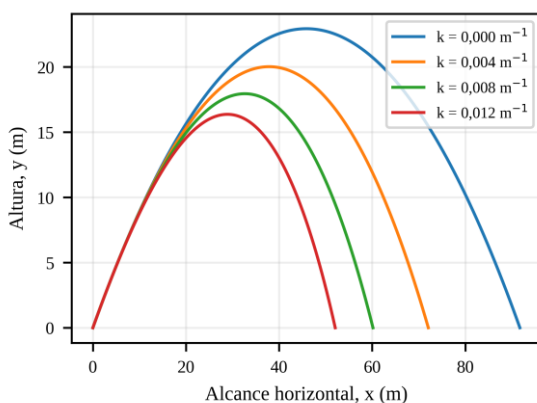


Figura 1. Trayectorias para diferentes niveles de resistencia aerodinámica con $v_0 = 30$ m/s y $\theta = 45^\circ$.

Fuente: Elaboración propia.

La Figura 1 evidencia que el arrastre no actúa como una simple reducción uniforme de escala. La componente horizontal de la velocidad

disminuye continuamente y la rama descendente se vuelve más pronunciada, de modo que la trayectoria deja de conservar la simetría del modelo ideal. Esta modificación concuerda con la estructura no lineal descrita para el problema cuadrático por Parker (1977), Hayen (2003) y Bradshaw (2023). También es coherente con las soluciones numéricas y aproximadas presentadas por Chudinov et al. (2023) y Duan et al. (2023), en las que la resistencia altera simultáneamente posición, velocidad y duración del movimiento.

Las reducciones promedio calculadas para los cinco ángulos aumentaron claramente con la velocidad inicial. Para $k = 0,012$ m^{-1} , la disminución media del alcance pasó de 7,47 % a 10 m/s a 51,87 % a 40 m/s. En el mismo intervalo, la reducción media de la altura máxima aumentó de 4,30 % a 36,80 %, mientras que la del tiempo de vuelo pasó de 2,18 % a 21,02 %.

Tabla 2. Reducción media respecto del modelo ideal para $k = 0,012$ m^{-1} .

v_0 (m/s)	Alcance (%)	Altura (%)	Tiempo (%)
10	7,47	4,30	2,18
20	23,43	14,48	7,63
30	39,23	26,12	14,34
40	51,87	36,80	21,02

Fuente: Elaboración propia.

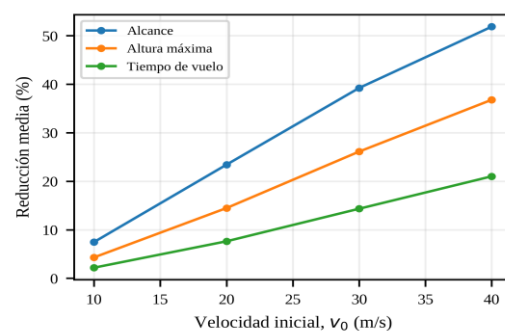


Figura 2. Reducción media del alcance, la altura máxima y el tiempo de vuelo para $k = 0,012$ m^{-1} .

En todas las velocidades se observó la misma jerarquía de sensibilidad relativa: alcance, altura máxima y tiempo de vuelo. La mayor afectación del alcance puede atribuirse a que el arrastre reduce la componente horizontal durante toda la trayectoria.

En el modelo ideal, v_x permanece constante; con resistencia cuadrática, en cambio, su disminución acumulativa limita cada vez más el desplazamiento horizontal. En la dirección vertical, el arrastre se suma a la gravedad durante el ascenso y se opone a ella durante el descenso, por lo que parte de su efecto sobre la duración total se compensa. Esta diferencia de mecanismos explica que el tiempo de vuelo presente reducciones proporcionales menores que el alcance y la altura.

El crecimiento del efecto con la velocidad inicial responde directamente a la dependencia cuadrática del arrastre. Al aumentar la rapidez, la fuerza resistente crece de forma más intensa y la desviación respecto del modelo ideal se amplifica. Este patrón es consistente con la revisión de Lubarda y Lubarda (2022) y con el análisis de Bradshaw (2023), que destacan la relevancia del modelo cuadrático a mayores números de Reynolds. También coincide con la formulación reciente de Jobunga (2026), en la que los efectos cuadráticos pasan a dominar frente a las contribuciones lineales cuando la velocidad aumenta.

Dentro de las 80 condiciones principales, la mayor reducción del alcance fue de 58,09 %, registrada para $v_0 = 40$ m/s, $\theta = 60^\circ$ y $k = 0,012$ m⁻¹. La máxima disminución de la altura alcanzó 44,32 %, mientras que la mayor reducción del tiempo de vuelo fue 25,31 %; ambas se obtuvieron para $v_0 = 40$ m/s, $\theta = 75^\circ$ y el mismo valor de k . El hecho de que los máximos efectos no ocurran en el mismo ángulo

confirma que las tres variables responden de manera diferenciada a la geometría del lanzamiento. Yıldırım (2025) ha señalado igualmente que alcance, altura y tiempo constituyen medidas complementarias del efecto del arrastre y no deben interpretarse como respuestas equivalentes. En el modelo ideal, la búsqueda numérica reprodujo un ángulo de 45° para las cuatro velocidades iniciales. La presencia de resistencia desplazó el máximo hacia ángulos menores, y el cambio aumentó simultáneamente con la velocidad inicial y con k .

Tabla 3. *Ángulo de lanzamiento que maximiza el alcance.*

v_0 (m/s)	$k = 0$	$k = 0,004$	$k = 0,008$	$k = 0,012$
10	45,000°	44,780°	44,521°	44,322°
20	45,000°	44,104°	43,324°	42,649°
30	45,000°	43,142°	41,781°	40,701°
40	45,000°	42,053°	40,189°	38,861°

Fuente: Elaboración propia.

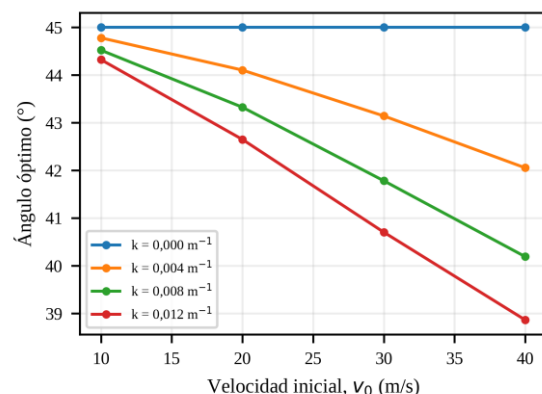


Figura 3. *Variación del ángulo de máximo alcance con la velocidad inicial y la resistencia aerodinámica.*

Fuente: Elaboración propia.

Para 10 m/s y $k = 0,012$ m⁻¹, el ángulo óptimo fue 44,322°, solo 0,678° por debajo del valor ideal. Para 40 m/s y el mismo nivel de resistencia, disminuyó a 38,861°, lo que corresponde a un desplazamiento de 6,139°. La tendencia confirma que la regla de 45° es una

propiedad del modelo sin disipación y no una condición general para el movimiento en aire. Hayen (2003a, 2003b) demostró que el máximo alcance bajo resistencia cuadrática requiere una condición de optimización dependiente del arrastre; los resultados obtenidos muestran cuantitativamente cómo esa condición cambia dentro del intervalo de velocidades y parámetros analizado.

Un lanzamiento con mayor ángulo aumenta la duración durante la cual el proyectil permanece expuesto al arrastre y reduce progresivamente su velocidad horizontal. Con resistencia suficientemente intensa, un ángulo algo menor conserva una componente horizontal inicial mayor y evita parte de la pérdida acumulada asociada con un vuelo prolongado.

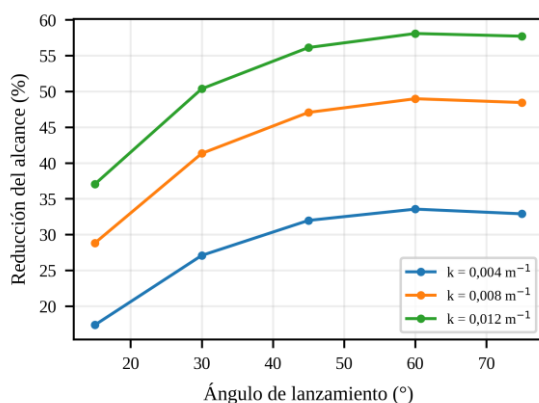


Figura 4. Reducción del alcance según el ángulo de lanzamiento para $v_0 = 40$ m/s.

Fuente: Elaboración propia.

El desplazamiento observado es compatible con la idea de que la optimización del alcance depende de la interacción entre condiciones iniciales y fuerzas aerodinámicas, como se ha mostrado tanto en análisis generales como en aplicaciones con arrastre y sustentación (Erlichson, 1983; Hayen, 2003a). La pérdida de alcance también dependió del ángulo de lanzamiento. Para la velocidad inicial de 40 m/s,

el aumento de k incrementó la reducción del alcance en todos los ángulos analizados, pero la respuesta no fue constante entre 15° y 75° . La máxima reducción relativa del alcance no se obtuvo a 45° , sino a 60° en la combinación de mayor velocidad y arrastre. Este resultado refleja la interacción entre el tiempo de exposición a la resistencia y la pérdida de velocidad horizontal.

Los lanzamientos muy bajos tienen menor duración, mientras que los de gran elevación destinan una proporción mayor de la velocidad inicial al movimiento vertical y producen alcances ideales menores. En el intervalo intermedio, la combinación de duración y desplazamiento horizontal puede generar la mayor diferencia relativa respecto del modelo sin resistencia. Esta respuesta dependiente del ángulo coincide con la complejidad descrita en las aproximaciones analíticas de Corvo (2022) y con la necesidad de considerar conjuntamente las condiciones iniciales y la intensidad de la resistencia señalada por Asad et al. (2025).

La parametrización mediante k permite interpretar estos resultados sin vincularlos a un único objeto. Un mismo valor puede representar diferentes combinaciones de densidad del aire, coeficiente de arrastre, área frontal y masa. Por ello, los resultados son apropiados para identificar patrones generales, aunque no constituyen predicciones directas para una pelota o proyectil específico si no se conocen sus propiedades aerodinámicas. Asimismo, el modelo supone C_D constante y excluye viento, rotación, fuerza de Magnus, variaciones de densidad y diferencias entre altura inicial y final. Estas simplificaciones fueron deliberadas para aislar el arrastre cuadrático. La incorporación de viento, por ejemplo, puede modificar adicionalmente las coordenadas y el tiempo de vuelo (Chudinov et al., 2023),

mientras que modelos más generales pueden requerir contribuciones lineales y cuadráticas simultáneas (Jobunga, 2026). Los resultados muestran que sustituir el modelo ideal por una formulación con arrastre cuadrático no equivale a aplicar una corrección porcentual fija. La desviación depende de la velocidad inicial, del ángulo, del parámetro aerodinámico y de la magnitud cinemática considerada. En condiciones de baja velocidad y pequeño k , el modelo ideal conserva una aproximación relativamente cercana; conforme aumenta la intensidad aerodinámica, las diferencias se vuelven suficientemente grandes para alterar tanto las magnitudes de la trayectoria como la condición de máximo alcance.

Conclusiones

Se concluye que la resistencia aerodinámica cuadrática modifica de manera diferenciada el alcance horizontal, la altura máxima y el tiempo de vuelo. En todas las velocidades estudiadas, el alcance presentó la mayor sensibilidad relativa al arrastre, seguido por la altura máxima y el tiempo de vuelo. Para $k = 0,012 \text{ m}^{-1}$, la reducción media del alcance aumentó desde 7,47 % a 10 m/s hasta 51,87 % a 40 m/s, lo que evidencia la creciente importancia de la interacción aerodinámica al aumentar la velocidad inicial.

La máxima pérdida de alcance dentro de las 80 condiciones principales fue de 58,09 %, mientras que las reducciones máximas de altura y tiempo alcanzaron 44,32 % y 25,31 %, respectivamente. Estos máximos se produjeron en ángulos diferentes, por lo que no resulta adecuado representar la influencia del aire mediante una única corrección aplicable a todas las variables del movimiento. La respuesta depende simultáneamente de la velocidad inicial, del ángulo de lanzamiento y de la intensidad del arrastre. También se determinó

que el ángulo de máximo alcance deja de ser 45° cuando se incorpora resistencia. El menor valor obtenido fue $38,861^\circ$ para 40 m/s y $k = 0,012 \text{ m}^{-1}$, equivalente a un desplazamiento de $6,139^\circ$ respecto del modelo ideal. Se establece así que el arrastre modifica no solo la magnitud del desplazamiento, sino también las condiciones iniciales que optimizan el alcance.

La parametrización general mediante k permite extender la interpretación a diferentes relaciones entre masa, área frontal, coeficiente de arrastre y densidad del fluido. Sin embargo, la aplicación a un objeto específico requiere conocer esas propiedades y considerar, cuando corresponda, efectos adicionales como variaciones del coeficiente de arrastre, viento, rotación o sustentación. Dentro de los supuestos adoptados, el análisis confirma que el modelo parabólico ideal es útil cuando la interacción aerodinámica es pequeña, pero puede producir desviaciones importantes al aumentar la velocidad o la susceptibilidad del proyectil al arrastre.

Referencias Bibliográficas

- Asad, J., Baba'a, A., & Wannan, R. (2025). Projectile motion under quadratic air resistance via multistep-differential transformation method. *Bulletin of the Transilvania University of Braşov, Series III: Mathematics and Computer Science*, 5(67)(1), 39–54.
<https://doi.org/10.31926/but.mif.2025.5.67.1.3>
- Bradshaw, J. (2023). Projectile motion with quadratic drag. *American Journal of Physics*, 91(4), 258–263.
<https://doi.org/10.1119/5.0095643>
- Chudinov, P., Eltyshv, V., & Barykin, Y. (2023). Projectile motion in a medium with quadratic drag at constant horizontal wind. *Momento*, (67), 117–132.
<https://doi.org/10.15446/mo.n67.107561>
- Corvo, A. (2022). Subtle features in projectile motion with quadratic drag found through

- Taylor series expansions. *American Journal of Physics*, 90(2), 135–140.
<https://doi.org/10.1119/10.0009227>
- Das, C., & Roy, D. (2014). Projectile motion with quadratic damping in a constant gravitational field. *Resonance*, 19, 446–465.
<https://doi.org/10.1007/s12045-014-0048-4>
- Duan, J., Rach, R., & Hu, D. (2023). High accuracy piecewise-analytic solutions and higher-order numeric solutions of projectile motion with a quadratic drag force by the multistage modified decomposition method. *Journal of Applied Analysis & Computation*, 13(4), 1679–1701.
<https://doi.org/10.11948/20210277>
- Erlichson, H. (1983). Maximum projectile range with drag and lift, with particular application to golf. *American Journal of Physics*, 51(4), 357–362.
<https://doi.org/10.1119/1.13248>
- Hayen, J. (2003). Projectile motion in a resistant medium: Part I: Exact solution and properties. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 38(3), 357–369.
[https://doi.org/10.1016/S0020-7462\(01\)00067-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7462(01)00067-1)
- Hayen, J. C. (2003). Projectile motion in a resistant medium Part II: Approximate solution and estimates. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 38(3), 371–380.
[https://doi.org/10.1016/S0020-7462\(01\)00068-3](https://doi.org/10.1016/S0020-7462(01)00068-3)
- Jobunga, E. (2026). Semianalytical approximation of the fluid drag in projectile motion using Newton's equation of motion. *Journal of Applied Mathematics*, 2026, Article 3586285.
<https://doi.org/10.1155/jama/3586285>
- Jobunga, E., Warui, K., Menge, B., Mugambi, E., & Dillmann, B. (2024). Analytical solution of the projectile motion under a linear drag force. *Journal of Applied Mathematics*, 2024, Article 8881003.
<https://doi.org/10.1155/2024/8881003>
- Kantrowitz, R., & Neumann, M. M. (2020). The English Galileo and his vision of projectile motion under air resistance. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2020, Article 9695053.
<https://doi.org/10.1155/2020/9695053>
- Long, L., & Weiss, H. (1999). The velocity dependence of aerodynamic drag: A primer for mathematicians. *The American Mathematical Monthly*, 106(2), 127–135.
<https://doi.org/10.1080/00029890.1999.12005019>
- Lubarda, M., & Lubarda, V. (2022). A review of the analysis of wind-influenced projectile motion in the presence of linear and nonlinear drag force. *Archive of Applied Mechanics*, 92(7), 1997–2017.
<https://doi.org/10.1007/s00419-022-02173-7>
- Morales, C., Muñoz, J., & Vera, C. (2023). Some remarks on projectile motion with a linear resistance force. *European Journal of Physics*, 44(6), 065003.
<https://doi.org/10.1088/1361-6404/acf0a5>
- Parker, G. (1977). Projectile motion with air resistance quadratic in the speed. *American Journal of Physics*, 45(7), 606–610.
<https://doi.org/10.1119/1.10812>
- Rosales, M. (2024). How to solve engineering problems involving turbulent drag: Exact, asymptotic analytical and numerical techniques. *International Journal of Mechanical Engineering Education*, 52(4), 533–549.
<https://doi.org/10.1177/03064190231202931>
- Yıldırım, H. (2025). Averages in projectile motion with linear and quadratic drag. *The American Mathematical Monthly*. Advance online publication.
<https://doi.org/10.1080/00029890.2025.2533116>



Esta obra está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-No Comercial 4.0 Internacional. Copyright © Manuel Macario Castro Briones, Carlos Luis Gusqui Guananga, Joselyn Alexandra Miranda Masaquiza.

Declaraciones éticas y editoriales del artículo
Contribución de los autores (Taxonomía CRediT) Manuel Macario Castro Briones: Conceptualización, Metodología, Software, Validación, Análisis formal, Investigación, Curación de datos, Visualización, Redacción – borrador original, Redacción – revisión y edición. Carlos Luis Gusqui Guananga: Conceptualización, Metodología, Validación, Análisis formal, Investigación, Curación de datos, Visualización, Redacción – borrador original, Redacción – revisión y edición. Joselyn Alexandra Miranda Masaquiza: Conceptualización, Metodología, Validación, Investigación, Supervisión, Administración del proyecto, Redacción – revisión y edición.
Declaración de conflicto de intereses Los autores declaran que no existe conflicto de intereses en relación con la investigación presentada, la autoría del manuscrito ni la publicación del presente artículo.
Declaración de financiamiento La presente investigación no recibió financiamiento específico de agencias públicas, comerciales o de organizaciones sin fines de lucro. En caso de existir financiamiento institucional o externo, este deberá ser declarado explícitamente por los autores en esta sección.
Declaración del editor El editor responsable certifica que el proceso editorial del presente artículo se desarrolló conforme a los principios de integridad científica, transparencia y buenas prácticas editoriales. El manuscrito fue sometido a un proceso de evaluación mediante revisión por pares doble ciego, garantizando la confidencialidad de la identidad de los autores y revisores durante todo el proceso de dictamen académico. Asimismo, el editor declara que el artículo cumple con los criterios científicos, metodológicos y éticos establecidos por la revista.
Declaración de los revisores Los revisores externos que participaron en la evaluación del presente manuscrito declaran haber realizado el proceso de revisión de manera objetiva, independiente y confidencial. Asimismo, manifiestan que no mantienen conflictos de interés con los autores ni con la investigación evaluada, y que sus observaciones y recomendaciones se fundamentan exclusivamente en criterios científicos, metodológicos y académicos.
Declaración ética de la investigación Los autores declaran que la investigación se desarrolló respetando los principios éticos de la investigación científica, garantizando la confidencialidad de los datos y el respeto a los participantes del estudio. En los casos en que la investigación involucre seres humanos, los procedimientos deben ajustarse a los principios éticos establecidos en la Declaración de Helsinki y a las normativas institucionales correspondientes.
Declaración sobre el uso de inteligencia artificial Los autores declaran que el uso de herramientas de inteligencia artificial, en caso de haberse utilizado durante el proceso de investigación o redacción del manuscrito, se realizó únicamente como apoyo técnico para mejorar la claridad del lenguaje o el análisis de información, manteniendo siempre la responsabilidad intelectual sobre el contenido del artículo. Las herramientas de inteligencia artificial no fueron utilizadas como autoras del manuscrito ni sustituyen la responsabilidad académica de los investigadores.
Disponibilidad de datos Los datos que respaldan los resultados de esta investigación estarán disponibles previa solicitud razonable al autor de correspondencia, respetando las normas éticas y de confidencialidad establecidas por la investigación.

